〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和７年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

I.

(1) (背理法) 方程式 $f(x)=0$ の解がすべて実数と仮定する。このとき，それらの絶対値は1なので，$x=\pm 1$ のいずれかである。
3次方程式は3つの解をもつので，必ず重複する。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の虚数解を $\alpha=p+qi$ とおくと，その複素共役 $\bar{\alpha}=p-qi$ も $f(x)=0$ の解である。
また，残りの1解を β とすると，$\beta=\pm 1$ となる。
仮定より，$p^2+q^2=1$ となるから

$f(x)=(x\pm 1)(x^2-2px+1)$ を得る。

よって，$2p$ は整数である。
さらに，$p^2+q^2=1$ より，$-1\leqq p\leqq 1$.
したがって，$p=0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1$.
それぞれに対応して，

$q=\pm 1,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0$

◦ $(p,q)=(\pm 1, 0)$ のとき，
$\alpha=\pm 1$：実数．これは不適

◦ $(p,q)=\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，
$\alpha^n\neq 1\ (n=1,\cdots,5)$ であり，$\alpha^6=1$．∴ $n=6$.（最小）

◦ $(p,q)=\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，
$\alpha^n\neq 1\ (n=1,2)$ であり，$\alpha^3=1$　∴ $n=3$.（最小）

◦ $(p,q)=(0, \pm 1)$ のとき，
$\alpha^n\neq 1\ (n=1,2,3)$ であり，$\alpha^4=1$　∴ $n=4$.（最小）

よって，$n=3,4,6$

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

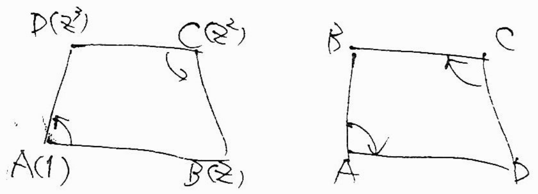
数学 解答例

令和７年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

II.

（1）　$1=z$, $1=z^2$, $1=z^3$, $z=z^2$, $z=z^3$, $z^2=z^3$ のいずれかをみたせばよい。
これらを解くと、$z=0, \pm 1, -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ の5つとなる。

（2）　z が実数のときは4点すべてが実軸上にあるので、z は虚数としてよい。①
4点が同一円周上にある四角形ABCDをなす $\iff \angle BAD+\angle DCB=\pi$
角度を z で表すと、$\pm(\angle BAD+\angle DCB)=\arg\left(\frac{z^3-1}{z-1}\right)+\arg\left(\frac{z-z^2}{z^3-z^2}\right)$



$=\arg(z^2+z+1)+\arg\left(-\frac{1}{z}\right)$

$=\arg\left(-\left(z+1+\frac{1}{z}\right)\right)$

よって、$\angle BAD+\angle DCB=\pi \iff z+1+\frac{1}{z}$ が正の実数

$\iff \underline{\mathrm{Im}\left(z+1+\frac{1}{z}\right)=0}$ ② かつ $\underline{\mathrm{Re}\left(z+1+\frac{1}{z}\right)>0}$ ③

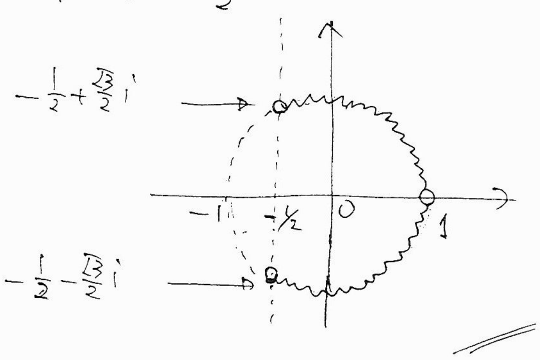
ここで ② $\iff z+1+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+1+\frac{1}{z}\right)}\ \left(=\bar{z}+1+\frac{1}{\bar{z}}\right)$

$\iff \bar{z}|z|^2+\bar{z}=z|z|^2+z \iff (z-\bar{z})(|z|^2-1)=0$

$\overset{①}{\iff} |z|^2=1\ (z\neq\pm1) \iff \underline{|z|=1\ (z\neq\pm1)}$ ④

さらに ④ のもとでは $z+1+\frac{1}{z}=z+1+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)+1$ であるので

② かつ ③ $\iff |z|=1\ (z\neq\pm1)$ かつ $\mathrm{Re}(z)>-\frac{1}{2}$



逆に求めた範囲は「$|z|=1$ かつ (1)以外の値」をみたすので、
点A, B, C, Dは単位円上の異なる4点となる。
また、z の虚部が正のときは反時計回りに、負のときは時計回りに
A, B, C, Dの順で並ぶことも分かる。

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和７年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

III

与えられた等式より $n \geqq 2$ ならば $f_n(x) = \left\{1 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f_{n-1}(t)e^{2t}\,dt\right\}x$ が成り立つ。

そこで $a_n = 1 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f_{n-1}(t)e^{2t}\,dt$ $(n \geqq 2)$ とおくと $f_n(x) = a_n x$ $(n \geqq 2)$ となる。

$f_1(x) = 2x$ だから $a_1 = 2$ と定めると，すべての自然数 n について $f_n(x) = a_n x$ が成り立つ。

よって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} a_{n-1} t e^{2t}\,dt = 1 + \frac{a_{n-1}}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} t e^{2t}\,dt$$

となる。ここで

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t e^{2t}\,dt = \left[\frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

だから

$$a_n = 1 + \frac{1}{8}a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

である。これより

$$a_n - \frac{8}{7} = \frac{1}{8}\left(a_{n-1} - \frac{8}{7}\right)$$

だから，数列 $\left\{a_n - \frac{8}{7}\right\}$ は，初項 $a_1 - \frac{8}{7} = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$，公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列なので

$$a_n - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

これより

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n x = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}x = \frac{8}{7}x$$

である。

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和７年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

Ⅳ.

(1) 与えられた不等式において，x を $x-h$ で置くと

$$xf(x)-(x-h)f(x-h)-(x-h)h \leqq h^2$$

であり，さらに h を $(-h)$ で置くと

$$xf(x)-(x+h)f(x+h)+(x+h)h \leqq h^2$$

となる。辺々 (-1) 倍して整理すると，求める不等式を得る。

(2) $g(x)=xf(x)$ と置くと，(1) の不等式より

$$0 \leqq g(x+h)-g(x)-xh \leqq h^2$$

となる。$h \neq 0$ で辺々割ると

$$\begin{cases} 0 \leqq \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}-x \leqq h & (h>0) \\ 0 \geqq \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}-x \geqq h & (h<0) \end{cases}$$

を得る。挟み打ち原理により

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=x$$

が成り立つから，関数 $g(x)$ は微分可能である $(g'(x)=x)$。

(3) $g'(t)=t$ を 0 から x まで積分すると $g(0)=0f(0)=0$ より

$$g(x)=g(x)-0=\int_0^x g'(t)\,dt=\frac{x^2}{2}$$

となる。よって $f(x)=\frac{x}{2}$ $(x\neq 0)$ であるが $f(0)=0$ の条件より $f(x)=\frac{x}{2}$ 。逆にこのとき

$$(x+h)f(x+h)-xf(x)-xh=\frac{1}{2}(x+h)^2-\frac{1}{2}x^2-xh$$
$$=\frac{1}{2}h^2 \leqq h^2$$

となるから，与えられた条件が成り立つのは $f(x)=\frac{1}{2}x$ が成り立つとき，かつそのときに限る。