〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和６年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

Ⅰ.

(1) $R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。

$P(x)$ と $R(x)$ を x^2 で割った余りは等しいから，

$R(x)=x^2(ax+b)+cx+d$

より，　$cx+d=-x+9$　　$\therefore c=-1,\ d=9$

仮定より，

$P(1)=R(1)$　　　$\therefore a+b+c+d=9$

$\therefore a+b=1.$

さらに，$P(x)$ と $R(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは等しいので，

$R(x)=(x-1)^2\{ax+(a+1)\}+(a+1)x-a+8$

より，　$(a+1)x-a+8=2x+7$　　$\therefore a=1,\ b=0$

したがって，　$\underline{R(x)=x^3-x+9}$

(2) $R(x)=x^3-x+9$

$=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+9$

したがって，任意の整数 n で $R(n)$ は3の倍数である。

これが素数となるから，

$R(n)=n^3-n+9=3$

$(n+2)(n^2-2n+3)=0$

$\therefore n=-2,\ 1\pm\sqrt{-2}$

ゆえに，　$\underline{n=-2}$

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和6年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

II.

直線PBの傾き $= \dfrac{t}{t-1}$ $(=: \alpha$ とおく$)$ より，

直線PBの式は $y = \alpha(x-1)$ であり，

点Qの座標は $\left(\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}, \dfrac{-2\alpha}{\alpha^2+1}\right)$ と求まる。

直線PCの傾き $= \dfrac{t}{t+1}$ $(=: \beta$ とおく$)$ より，

直線PCの式は $y = \beta(x-1)$ であり，

点Rの座標は $\left(\dfrac{\beta^2-1}{\beta^2+1}, \dfrac{-2\beta}{\beta^2+1}\right)$ と求まる。

このとき
$$\begin{cases} \text{QAの傾き} = \dfrac{(\alpha-1)^2}{2\alpha^2} = \dfrac{1}{2t^2} \\ \text{RAの傾き} = \dfrac{(\beta-1)^2}{2\beta^2} = \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$$
で，両者は一致する。

よって，3点A，Q，Rは同一直線上にあることが分かる。

（直線QRの式は

$$y = \frac{1}{2t^2}x + \frac{-4t^4 \pm 4t^3 \mp 2t + 1}{2t^2(2t^2 \mp 2t + 1)} = \frac{1}{2t^2}x + \frac{1-2t^2}{2t^2}$$

である。）

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和６年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

Ⅲ.

(1) ℓ と C_1 が接する点を $(p, \log p)$ $(p>0)$ とすれば，ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{p}(x-p)+\log p=\frac{1}{p}x-1+\log p \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

（注：ℓ は y 軸に平行な直線ではない）

と書ける。一方，ℓ と C_2 が接する点を $\left(q, \frac{1}{3}\log q\right)$ $(q>0)$ とすれば，ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{3q}(x-q)+\frac{1}{3}\log q=\frac{1}{3q}x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log q \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

と書ける。(i) と (ii) は同じ直線を表すから

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{3q} & \cdots\cdots \text{(iii)} \\ -1+\log p=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\log q & \cdots\cdots \text{(iv)} \end{cases}$$

である。(iii) より $q=\frac{1}{3}p$，これを (iv) に代入して p について解くと $p=\frac{e}{\sqrt{3}}$．このとき $q=\frac{e}{3\sqrt{3}}$．よって ℓ の方程式は (i) より

$$y=\frac{\sqrt{3}}{e}x-\frac{1}{2}\log 3 \quad /\!/$$

(2) (1) より求める部分の面積 S は

$$S=\int_{\frac{e}{3\sqrt{3}}}^{1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{e}x-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}\log x\right\}dx+\int_{1}^{\frac{e}{\sqrt{3}}}\left\{\frac{\sqrt{3}}{e}x-\frac{1}{2}\log 3-\log x\right\}dx$$

となる。第1項，第2項をそれぞれ I_1，I_2 とすると $\int \log x\,dx=x\log x-x+C$ より（C は積分定数）

$$I_1=\left[\frac{\sqrt{3}}{2e}x^2-\frac{\log 3}{2}x-\frac{1}{3}x\log x+\frac{1}{3}x\right]_{\frac{e}{3\sqrt{3}}}^{1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2e}-\frac{\log 3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}e}{54}$$

$$I_2=\left[\frac{\sqrt{3}}{2e}x^2-\frac{\log 3}{2}x-x\log x+x\right]_{1}^{\frac{e}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{6}e-\frac{\sqrt{3}}{2e}+\frac{\log 3}{2}-1$$

よって

$$S=I_1+I_2=\frac{4\sqrt{3}e}{27}-\frac{2}{3}$$ である.

数学 解答例

令和6年度
一般選抜前期
私費外国人
帰 国 生

IV

(1). $g(x)=\dfrac{x}{1-x}+\log(1-x)\left(=-1+\dfrac{1}{1-x}+\log(1-x)\right)$ とおくと.

$g'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{(1-x)^2}>0\quad(0<x<1)$.

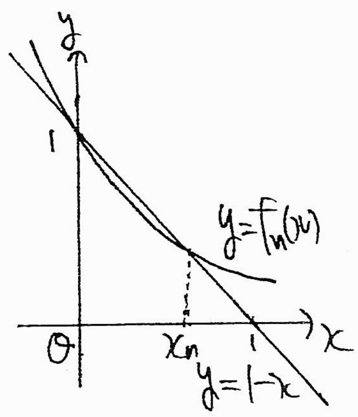
$\therefore\ \dfrac{x}{1-x}>-\log(1-x)\quad(0<x<1)$

$h(x)=-\log(1-x)-\dfrac{2x}{2-x}\left(=-\log(1-x)+2-\dfrac{4}{2-x}\right)$ とおくと,

$h'(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{4}{(2-x)^2}=\dfrac{x^2}{(1-x)(2-x)^2}>0\quad(0<x<1)$.

$\therefore\ -\log(1-x)>\dfrac{2x}{2-x}\quad(0<x<1)$ //

(2) 曲線 $y=f_n(x)$ と直線 $y=1-x$ を図示すると右図のようになる。$0<x_n<1$ なので、(1)から



$$\frac{x_n}{1-x_n}>-\log(1-x_n)>\frac{2x_n}{2-x_n}$$

一方. $e^{-\frac{n}{n-1}x_n}=f_n(x_n)=1-x_n$ から.

$$\log(1-x_n)=-\frac{n}{n-1}x_n.$$

よって.

$$\frac{x_n}{1-x_n}>\frac{n}{n-1}x_n>\frac{2x_n}{2-x_n}\quad\therefore\ \frac{1}{1-x_n}>\frac{n}{n-1}>\frac{2}{2-x_n}$$

これを解いて

$$\frac{1}{n}<x_n<\frac{2}{n}$$ //